LA PARABOLA

"Señor.... cuando nos equivoquemos, concédenos la voluntad de rectificar; y cuando tengamos razón.... no permitas que nos hagamos insufribles para el prójimo".
Marshall

En la presente entrega, describiremos una curva que como la circunferencia, es muy importante en las matemáticas y goza con mucha frecuencia de una multiplicidad de aplicaciones.

Definición.

Una **Parábola** es el conjunto de todos los puntos de un plano que son equidistantes de un **punto fijo llamado foco** y de una **recta fija llamada directriz**.

En la figura el punto F es el foco y la recta D es la directriz, el punto V, a la mitad del foco y la directriz (pertenece a la parábola) se llama **vértice.**

La recta L paralela a la directriz intercepta a la parábola en los punto P y P' los que son simétricos, y así ocurre con todos los puntos de ella por esta razón la recta VF, que pasa por el vértice y el foco es el bisector perpendicular de PP' y de todas las cuerdas dibujadas de modo similar. A la recta que pasa por los puntos V y F se le llama **eje de la parábola** y se dice que la parábola es simétrica respecto a su eje.

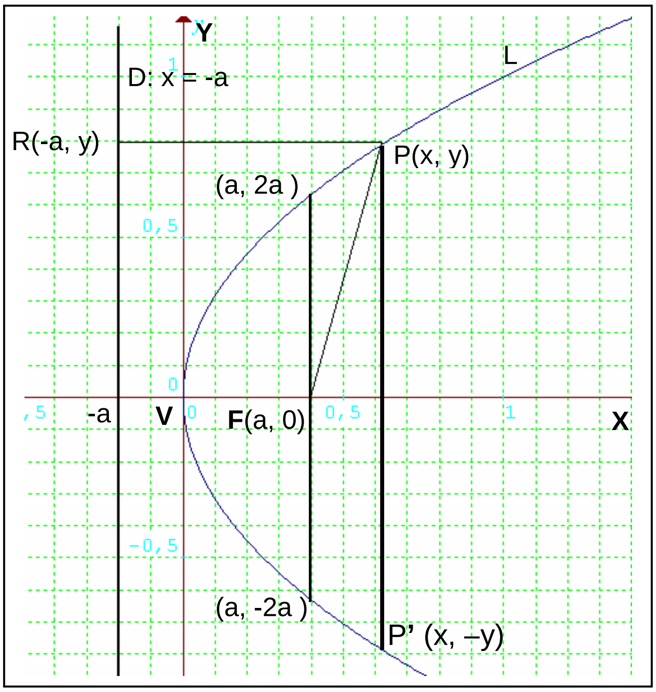


Figura 1

La ecuación más simple de la parábola la conseguimos haciendo coincidir el vértice con el origen del sistema de coordenadas cartesianas y el eje de la parábola con el eje de las abscisas, de tal manera que la directriz D, tiene ecuación x = –a; por tanto el punto R de ella tiene por coordenadas (–a, y)

Aplicando la definición de la parábola del punto P a la directriz D y al foco F se tiene:

d(P, F) = d(P, R)

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+a)^2+(y-y)^2}$$

de donde:

$$(x-a)^2+y^2=(x+a)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$\boxed{y^2 = 4ax}$$

Esta es la ecuación de una parábola con el vértice en el origen y foco en (a, 0).

Como a > 0, x puede tomar cualquier valor positivo o cero, pero no valores negativos, la gráfica se aleja por tanto indefinidamente en el primer y cuarto cuadrantes y el eje de la parábola es el eje positivo de las abscisas. A partir de la ecuación, resulta evidente que la parábola es simétrica con respecto a su eje, pues se tiene que:

$$\boxed{y = \pm 2\sqrt{ax}}$$

LADO RECTO:

A la cuerda trazada por el foco y perpendicular al eje de la parábola se le da el nombre de lado recto. La longitud del lado recto se puede determinar mediante las coordenadas de sus extremos. Sustituyendo “a” con “x” en la ecuación $y^2 = 4ax$, se encuentra:

$$y^2 = 4a^2 \quad \wedge \quad y = \pm 2^a$$

Por tanto los extremos son (a, –2a) y (a, 2a). Esto hace que la longitud del lado recto sea igual a:

$$\boxed{\textbf{L. R. =}\ 4a}$$

Nota:
El vértice y el foco son suficientes para hacer un esbozo de la parábola

Si tenemos el foco de la parábola a la izquierda del origen, se escoge **a < 0**, por tanto el foco se representa con F(a, 0), y la directriz con x = –a. (ver la figura). Por consiguiente considerando el punto P(-x, y) se tiene:

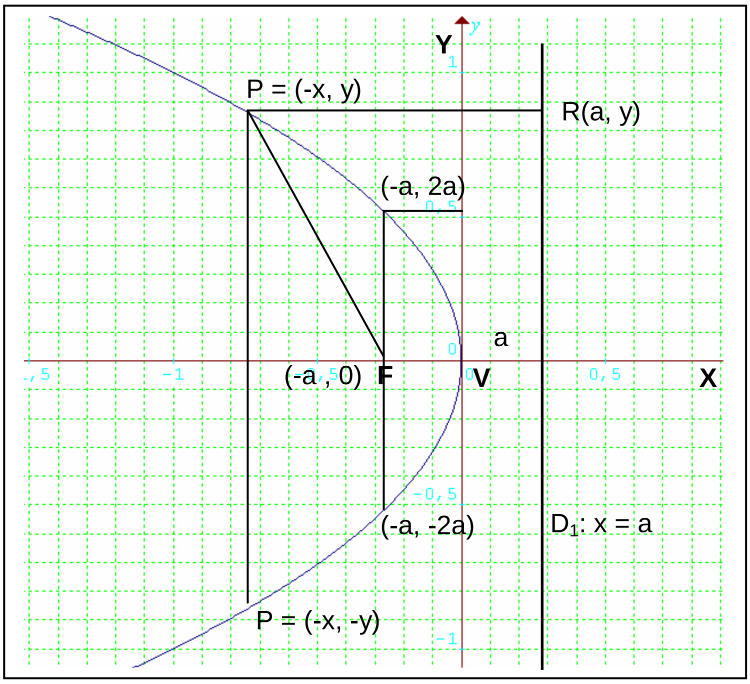


Figura 2

Aplicando la definición de la parábola del punto P a la directriz D_1 y al foco F se tiene:

d(P, F) = d(P, R)

$$\sqrt{(-x+a)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(a+x)^2+(y-y)^2}$$

de donde:

$$(a-x)^2+y^2=(x+a)^2$$

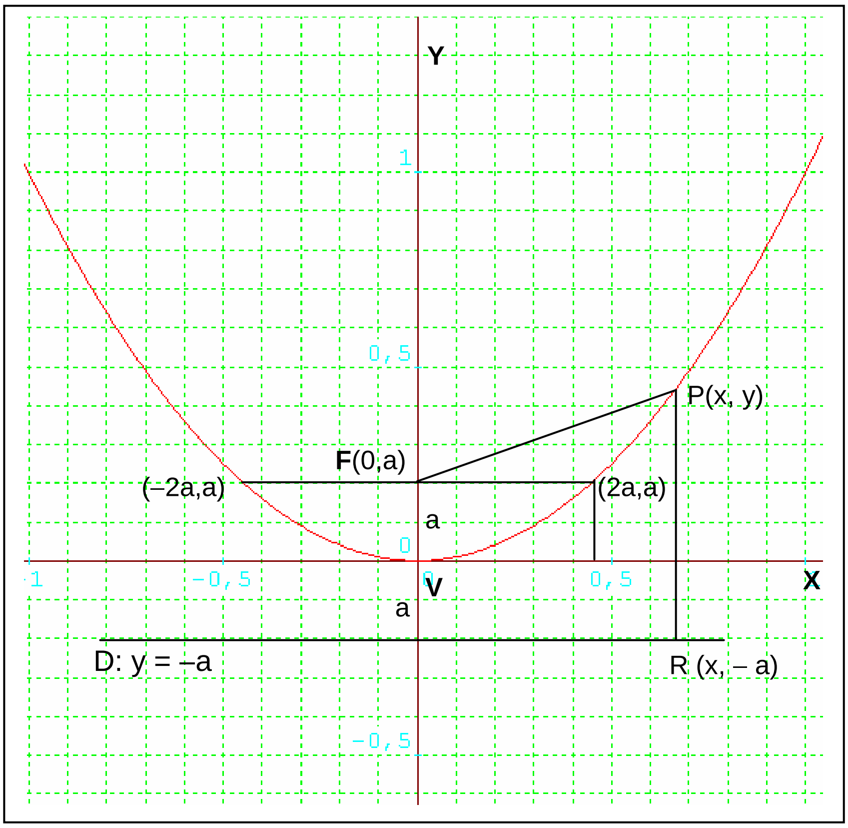
$$a^2-2ax+x^2+y^2=x^2+2ax+a^2$$

$$\boxed{y^2=4ax}$$

Esta es la ecuación de una parábola con el vértice en el origen y foco en (–a, 0). En esta última expresión como a < 0, la variable x sólo puede tomar valores negativos para que la expresión última $y^2 = 4ax$, tenga sentido.

En resumen podemos afirmar: "La ecuación de una parábola con vértice en el origen y foco en (a, 0) es: $y^2 = 4ax$. La parábola se abre hacia la derecha si: a > 0 y se abre hacia la izquierda si a < 0.

Si ahora hacemos coincidir el vértice de la parábola con el origen del sistema de coordenadas cartesianas y el eje de la parábola con el eje de las ordenadas, de tal manera que la directriz D, tiene ecuación y = –a; por lo tanto el punto R de ella tiene por coordenadas (x, –a).



En la figura se tiene que la distancia del punto P a la directriz D, es igual a la distancia al foco F, por tanto:

d(P, F) = d(P, R)

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-a)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y+a)^2}$$

de donde:

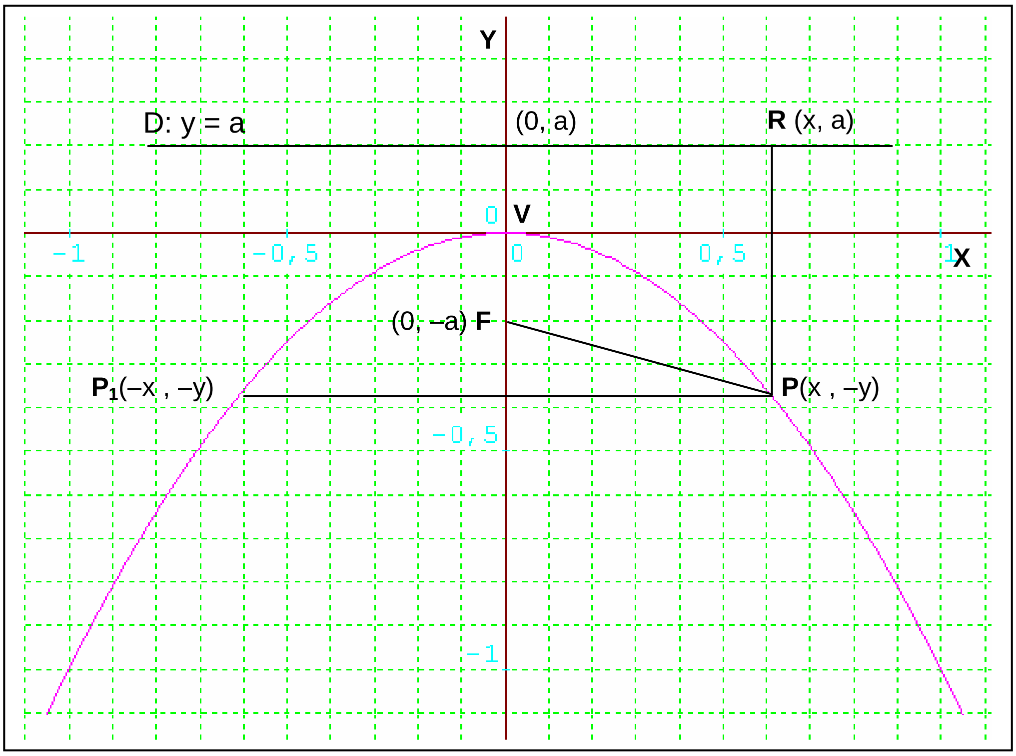
$$x^2+(y-a)^2=(y+a)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = y^2 + 2ay + a^2$$

$$\boxed{x^2 = 4ay}$$

como observamos en este caso la parábola **se abre hacia arriba** y es simétrica al eje de ordenadas, **puesto que a > 0**; entonces los únicos valores que puede tomar "y" son valores positivos incluyendo el cero.

En el último caso se tiene cuando la directriz tiene por ecuación D: y = a; la parábola se abre hacia abajo siendo paralelo su eje al eje de las ordenadas, siendo R (x, a), tal como vemos en la figura siguiente:



En la figura observamos que la distancia del punto P a la directriz D, es:

d(P, F) = d(P, R)

$$\sqrt{(0-x)^2+(-a+y)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(a+y)^2}$$

de donde:

$$x^2+(y-a)^2=(y+a)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = y^2 + 2ay + a^2$$

$$\boxed{x^2 = 4ay}$$

puesto que "a" es negativa, entonces la única posibilidad de "y", es ser negativa para que la expresión $x^2 = 4ay$ tenga sentido.

Esto nos permite concluir en la siguiente afirmación:
La ecuación de una parábola con vértice en el origen y foco (0, a) es: $x^2 = 4ay$ La parábola se abre hacia arriba si "a > 0" y se abre hacia abajo si "a < 0".

Resumen

Posición	Se abre hacia la	Ecuación	valor de
horizontal	derecha	$y^2 = 4ax$	a >0 ; x >0
horizontal	izquierda	$y^2 = 4ax$	a< 0; x < 0
vertical	arriba	$x^2 = 4ay$	a > 0; y >0
Vertical	abajo	$x^2 = 4ay$	a< 0; y < 0

Ejemplo 1:
Escríbase la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en (0, 4)

Solución
Aquí aplicamos la ecuación $x^2 = 4ay$. La distancia del vértice al foco es 4, y por tanto, a = 4. Sustituyendo este valor con a, se obtiene:

$$x^2 = 4(4)y \quad \Rightarrow \quad x^2 = 16y$$

Ejemplo 2:
Halle la ecuación de una parábola tiene vértice en el origen, su eje a lo largo del eje X y pasa por el punto (–3, 6).

Solución

La ecuación de la parábola es de la forma $y^2 = 4ax$. Para determinar el valor de 4a, se sustituyen las coordenadas del punto dado en esta ecuación. Así se obtiene:

$$36 = 4a(-3) \quad \Rightarrow \quad 4a = -12$$

La ecuación requerida es: $y^2 = -12x$. El foco está en (–3, 0) y el punto dado es el extremo superior del lado recto.

Ejemplo 3:
Hallar la ecuación de la directriz y la longitud del "latus rectum" (lado recto) de la parábola, $3y^2 = 8x$.

Solución

La ecuación de la parábola la podemos expresar del modo siguiente: $y^2 = 8/3\ x$. De donde se deduce que: $4a = \frac{8}{3}$ de donde: $a = \frac{2}{3}$. El foco esta dado pues por el punto de coordenadas (2/3, 0) y la ecuación de la directriz es: $x = -2/3$.

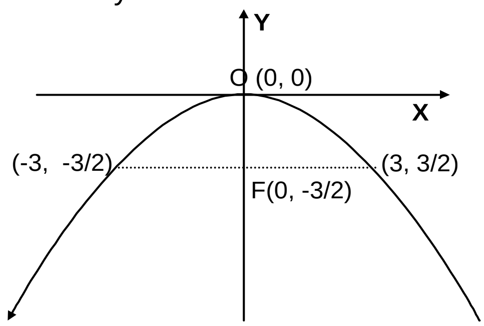
Para hallar la longitud del lado recto se calcula el valor de "y" para x = 2/3. Si x = 2/3 se tiene y = 4/2 con lo cual la longitud del lado recto es 2(4/3) = 8/3.

Ejemplo 4

La ecuación de una parábola esta dada por: $x^2 = -6y$. Halle las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto.

Solución

La ecuación es de la forma $x^2 = ay$, donde a es negativa. Por ello el foco está sobre el eje Y negativo, y la parábola se abre hacia abajo. A partir de la ecuación $4a = -6$, hallamos $a = -3/2$. Por tanto, las coordenadas del foco son $(0, -3/2)$; y la directriz es: $y = 3/2$. La longitud del lado recto es el valor absoluto de 4a y en este caso, es 6. El lado recto se extiende 6 unidades hacia la izquierda del foco y 3 unidades hacia la derecha



PROBLEMAS PROPUESTOS

Solo hay un bien: el conocimiento. Sólo hay un mal: la ignorancia".

Sócrates

Encuentre el foco y la directriz de las siguientes parábolas.

1. $y^2 = 8x$
2. $x^2 = -y$
3. $y^2 + 2x = 0$
4. $y^2 - 24x = 0$

Encuentre en cada caso la ecuación de la parábola con vértice en el origen y con:
5. Foco en (0, 2)
6. Foco en (4, 0)
7. Directriz: $x = 5$
8. Directriz: $y = -2$.
9. Encuentre la ecuación de la parábola con vértice en el origen, si el foco está sobre el eje Y, y la parábola pasa por el punto P (2, 3).

10. Encuentre la ecuación de la parábola con vértice en el origen, que abre hacia abajo y su lado recto mide 12.

En los ejercicios siguientes encuentre las coordenadas del foco, la longitud del lado recto y las coordenadas de sus extremos para cada una de las parábolas dadas, además halle la ecuación de la directriz de cada parábola.

11. $y^2 = 4x$
12. $y^2 = -16x$
13. $x^2 = -10y$
14. $y^2 + 3x = 0$
15. $3x^2 - 20y = 0$

PARABOLA CON VERTICE EN (h, k).

Ahora consideramos una parábola cuyo eje es paralelo a uno de los ejes coordenados (sin estar sobre él) y su vértice se halla en (h, k); por tanto se presentan los casos siguientes:

a) Eje paralelo al eje X.

Siendo la parábola de vértice (h, k), y eje paralelo al eje X, el foco esta situado en F(h + a, k). Como la distancia del vértice al foco es "a" usando la traslación de ejes se obtiene en seguida la ecuación:

$$\boxed{y'^2 = 4ax'}$$

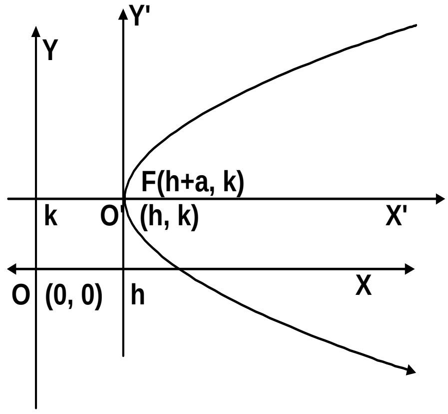
la que esta en función de los nuevos ejes coordenados. Para escribir la ecuación de la parábola con respecto a los ejes coordenados originales, usamos las fórmulas de traslación:

$x = x' + h \quad ; \quad y = y' + k$

obteniendo de este modo:

$$(y-k)^2 = 4a(x-h)$$

la misma que tiene sentido, solo cuan-do a > 0 y (x – h) > 0; dando como resultado que la parábola se abre hacia la derecha. Tal como se observa en la figura siguiente:



Para a < 0, el factor (x – h) debe ser menor o igual a cero y por tanto, la parábola se abrirá hacia la izquierda. El eje de la parábola está sobre la recta y – k = 0. La longitud del lado recto es igual al valor absoluto de "4a"

Se puede hacer un análisis similar, si el eje de una parábola es paralelo al eje Y, en consecuencia, tenemos las siguientes afirmaciones:

Teorema 1:
La ecuación de **una parábola de eje paralelo al eje X,** con vértice en (h, k) y foco F(h+a, k) es:

$$\boxed{(y-k)^2 = 4a(x-h)}$$

En vista que: $(y-k)^2 = 4a(x-h) \geq 0$

Los signos de “a” y “x – h” son siempre iguales. Por consiguiente: La parábola se abre hacia la derecha, si $a > 0$ y $x \geq h$; y se abre hacia la izquierda si $a < 0$ y $x \leq h$.

Observación:

Los elementos de la parábola de ecuación: $(y-k)^2 = 4a(x-h)$; son:

1. Vértice: V(h, k)
2. Foco: F(h + a, k)
3. Directriz L: x = h – a
4. Eje de la parábola: y = k
5. Longitud del lado recto: LR = $|4a|$
6. Extremos del lado recto: (h + a, k ± 2a)
7. Longitud del radio focal: Si P(x_1 , y_1) es un punto de la parábola, entonces la longitud del radio focal del punto P es:

$$r_f = |FP| = |x_1 - h + a|$$

Radio focal (FP): Es el segmento que une el foco con cualquier punto de la parábola. Se le conoce también con el nombre de **radio vector.**

Teorema 2:
La ecuación de **una parábola de eje paralelo al eje Y** con vértice en (h, k) y foco en (h, k + a) es:

$$\boxed{(x-h)^2 = 4a(y-k)}$$

La parábola se abre hacia arriba si: $a > 0$ e $y \geq k$ aquí el vértice **V** se llama **punto mínimo** de la parábola; y se abre hacia abajo si: $a < 0$ e $y \leq k$ en este caso el vértice V se llama **punto máximo** de la parábola.

Observación:
Los elementos de la parábola de ecuación $(x-h)^2 = 4a(y-k)$; son:
1. Vértice: V(h, k)
2. Foco: F(h , k + a)
3. Directriz L: y = k – a
4. Eje de la parábola: x = h
5. Longitud del lado recto: LR = $|4a|$
6. Extremos del lado recto: (h ± 2a , k + a)
7. Longitud del radio focal: Si P(x_1 , y_1) es un punto de la parábola, entonces la longitud del radio focal **(radio vector)** del punto P es:

$$r_f = |FP| = |y_1 - k + a|$$

Observaciones:

1. Se dice que las ecuaciones dada por el teorema están en la forma usual o forma estándar o forma ordinaria de la parábola.

2. Para esbozar el gráfico de una parábola son suficientes conocer las coordenadas del vértice y los extremos del lado recto. naturalmente si se determinan algunos otros puntos, será mayor la precisión.

ECUACION GENERAL DE LA PARABOLA.

Nótese que cada una de las ecuaciones anteriores es cuadrática en una variable y lineal en la otra variable. Este hecho nos permite expresar dichas ecuaciones de manera más elocuente, si se efectúan los cuadrados indicados y se trasponen términos para obtener las formas generales de la parábola.

Así tenemos: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ es una parábola de eje horizontal y que la ecuación: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ es una parábola de eje vertical. Si desarrollamos ambas ecuaciones se tiene:

$$y^2 - 4px - 2ky + (k^2 + 4ph) = 0$$

$$x^2 - 2hx - 4py + (h^2 + 4pk) = 0$$

y observamos que cada uno contiene un término de segundo grado, ya sea en y^2 o x^2. Es decir que cada ecuación se puede reducir a la forma cuadrática:

$$\boxed{\mathbf{y^2 + Dx + Ey + F = 0}}$$

ó

$$\boxed{\mathbf{x^2 + Dx + Ey + F = 0}}$$

Ecuaciones que **se denominan ecuaciones generales de la parábola.**

Ahora Inversamente, analicemos la ecuación:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

Completando cuadrados para pasarla a la forma ordinaria se tiene:

$$y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} = -Dx - F + \frac{E^2}{4}$$

$$(y + \frac{E}{2})^2 = -D(x - \frac{E^2 - 4F}{4D}) \ ; \quad D \neq 0$$

Vemos que si $D \neq 0$, la ecuación (1) representa una parábola cuyo eje es horizontal.

Si $D = 0$, podemos escribir la ecuación (1) en la forma:

$$(y + \frac{E}{2})^2 = \frac{E^2 - 4F}{4}$$

ecuación que representa:

- Dos recta paralelas al eje X, si: $E^2 - 4F > 0$
- Una recta paralela al eje X, si: $E^2 - 4F = 0$
- Un conjunto vacío, si: $E^2 - 4F < 0$.

A una conclusión similar se llega para la parábola de la forma: $x^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Combinando estos resultados tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3:
Una ecuación de segundo grado, que carece de término en "xy", puede escribirse de la forma:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (2)$$

o bien

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (3)$$

y representan:

1) En la ecuación de segundo grado:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

- Si $D \neq 0$, representa una parábola de eje paralelo al eje X.
- Si $D = 0$, representa dos rectas paralelas al eje X, a una recta paralela al eje X, o el conjunto vacío, según que las raíces de la ecuación $y^2 + Ey + F = 0$ sean reales y diferentes, reales iguales o complejas.

2) En la ecuación de segundo grado:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

- Si $E \neq 0$, representa una parábola de eje paralelo al eje Y.
- Si $E = 0$, representa dos rectas paralelas al eje Y, a una recta paralela al eje Y, o el conjunto vacío, según que las raíces de la ecuación $x^2 + Dx + F = 0$ sean reales y diferentes, reales iguales o complejas.

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la parábola cuyo vértice está en (5, –2) y su foco en (5, –4).

Solución

Como el foco está debajo del vértice, la parábola es vertical y se abre hacia abajo, la distancia del vértice al foco es $p = 2$, y por lo tanto su ecuación es:

$$(x-5)^2 = -4(2)(y-(-2))$$

Es decir: $(x-5)^2 = -8(y+2)$

si queremos obtener la forma general, desarrollamos el binomio y efectuamos las reducciones necesarias y se obtiene:
$x^2 - 10x + 8y + 41 = 0$

2. Encontrar los elementos de la parábola cuya ecuación es: $-y^2 + 12x + 10y - 61 = 0$ y esbozar el gráfico.

Solución

Como la variable que está "al cuadrado" es "y", la directriz de la parábola es horizontal. Pasamos todos los términos en "y" de un lado de la ecuación y los demás del otro lado.

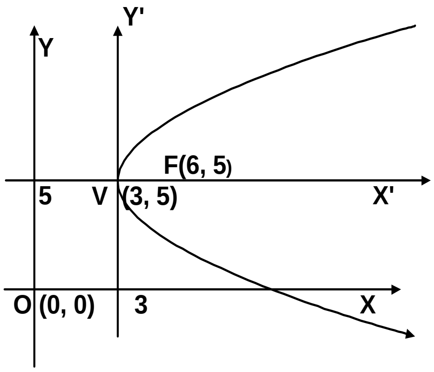
$y^2 - 10y = 12x - 61$

en el primer miembro completamos el trinomio cuadrado perfecto y sumamos el mismo término del otro lado de la ecuación para no alterar la igualdad

$y^2 - 10y + 25 = 12x - 61 + 25$

es decir:
$(y - 5)2 = 12(x - 3)$

El vértice es V(3, 5); la distancia del vértice al foco es p = 12/4 = 3, la parábola se abre hacia la derecha, así que el foco es F(3 + 3, 5) = F(6, 5). La directriz es la recta, L: x = 3 – 3 = 0.



LA PARABOLA QUE PASA POR TRES PUNTOS.

Vimos ya que tres puntos determinan una circunferencia. Para el caso de la parábola, en general se necesitan más puntos, pero si tenemos como dato adicional que el eje de la parábola es paralelo a uno de los ejes cartesianos, entonces sí bastan tres puntos no alineados para determinarla. Esto se debe a que la ecuación general de una parábola con eje horizontal es de la forma:

$$\mathbf{y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

y la de una parábola con eje vertical es de la forma:

$$\mathbf{x^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

vemos que en ambos caso necesitamos determinar tres coeficientes D, E y F. Si conocemos tres puntos no alineados y sustituimos sus coordenadas en la ecuación de la parábola, obtenemos tres ecuaciones lineales con tres variables que podemos resolver siempre que los puntos no estén alineados.

Ejemplo 1.

Encontrar la ecuación de la parábola con eje paralelo al eje X y que pasa por $(3/4,\ 9)\ ;\ (-5/4,\ 1)\ ;\ (0,\ 11)$

Solución

Como el eje de la parábola es paralelo al eje X, entonces la ecuación general de la parábola tiene la forma:

$$\mathbf{y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

como los tres puntos pertenecen a la parábola, sus coordenadas satisfacen la ecuación anterior. Al sustituir estos valores obtenemos:

$$\begin{aligned} 81 + \frac{3}{4}D + 9E + F &= 0 \\ 1 - \frac{5}{4}D + E + F &= 0 \\ 121 + 11E + F &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema nos da:

$$D = 16 \;;\; E = -14 \;;\; F = 33$$

que la sustituir los valores en la ecuación se obtiene:

$$y^2 + 16x - 14y + 33 = 0$$

Ejemplo 2
Una parábola cuyo eje es paralelo al eje Y, pasa por los puntos (1, 1); (2, 2) y (–1, 5). Encuentre su ecuación.

Solución

Como el eje de la parábola es paralelo al eje Y, la ecuación debe ser cuadrática en “x” y lineal en “y”. Por ello se comienza con la forma general:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Las coordenadas de cada uno de los puntos dados debe satisfacer esta ecuación. Sustituyendo las coordenadas de cada punto, uno por uno se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 1^2 + D + E + F &= 0 \\ 2^2 + 2D + 2E + F &= 0 \\ (-1)^2 - D + 5E + F &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema simultáneo de ecuaciones que forma se tiene:

$$D = -2 \;;\; E = -1 \;;\; F = 2.$$

Luego la ecuación de la parábola es:

$$x^2 - 2x - y + 2 = 0$$

Ejemplo 3:
Una parábola de eje horizontal pasa por los puntos A(6, 4); B(0, –2) y C(6, –4). Hallar las ecuaciones de la parábola y de su cuerda focal paralela a la recta: $5x + 3y - 2 = 0$.
Solución

La ecuación de la parábola es de la forma:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (*)$$

Como los tres puntos dados están sobre la parábola, sus coordenadas satisfacen la ecuación (*) . Por tanto tenemos:

$(6, 4) \in \mathcal{P} \;\Rightarrow\; 16 + 6D + 4E + F = 0$
$(6, -4) \in \mathcal{P} \;\Rightarrow\; 16 + 6D - 4E + F = 0$
$(0, -2) \in \mathcal{P} \;\Rightarrow\; 4 - 2E + F = 0$

Resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas, se obtiene:

$$E = 0 \;;\; F = -4 \;;\; D = -2$$

Sustituyendo éstos valores en (*), la ecuación de la parábola es:

$$y^2 - 2x - 4 = 0 \quad ó \quad y^2 = 2(x + 2)$$

En este caso: $h = -2$; $k = 0$; $a = 1/2$.

Luego: $F(-3/2, 0)$

La cuerda focal paralela a la recta: $5x + 3y - 2 = 0$, es:
L_1: $y - 0 = -\frac{5}{3}(x + \frac{3}{2})$ ó $10x + 6y + 15 = 0$

Ejemplo 4:
Hallar la ecuación de la parábola, de foco F(3, 2) y de directriz: $y + 2 = 0$. Además calcular la longitud del radio focal del punto P(1, 1/2).

Solución

Como el eje de la parábola es vertical, la ecuación de la parábola es de la forma:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Para nuestro caso se tiene: $a = 2$; $h = 3$; $k = 0$. Luego la ecuación pedida es:

$$(x - 3)^2 = 8y \quad ó \quad x^2 - 6y - 8y + 9 = 0$$

La longitud del radio focal del punto P(1, 1/2) , es:

$$|PF| = |y_1 - k + p| = \left|\frac{1}{2} - 0 + 2\right| = \frac{5}{2}$$

Ejemplo 5:
Un arco parabólico tiene 18 m. de altura y 24 m. de ancho. Si la parte superior del arco es el vértice de la parábola, ¿A qué altura sobre la base tiene la parábola un ancho de 16 metros?

Solución

Sea V = (0, 18) el vértice de la parábola con eje Y.
Luego la ecuación de la parábola es: $(x - 0)^2 = 4a(y - 18)$

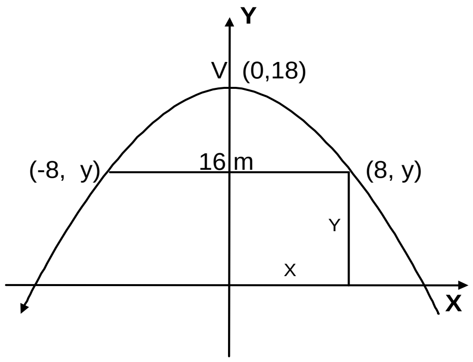
El punto (12, 0) se halla en la parábola y sustituyendo las coordenadas en la ecuación, calculamos a:

$$12^2 = 4a(0, 18) \quad \Rightarrow \quad a = -2$$

Como la parábola es simétrica, la altura buscada es la ordenada del punto (8, y) de la parábola. Entonces:

$$8^2 = -8(y - 18)$$

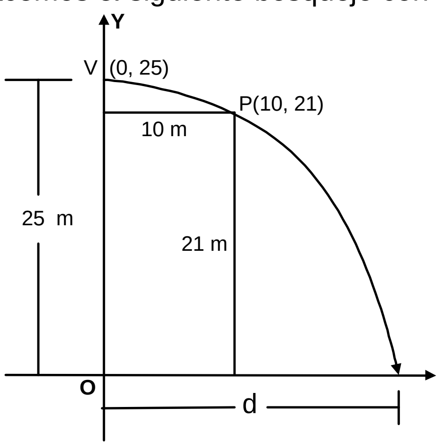
de donde: y = 10. Gráficamente:



Ejemplo 6:
El agua que fluye de un grifo horizontal que está a 25m del piso describe una curva parabólica con vértice en el grifo. Si a 21 m del piso, el flujo del agua se ha alejado 10 m de la recta vertical que pasa por el grifo, ¿a qué distancia de esta recta vertical tocará el agua el suelo?.

Solución

hacemos el siguiente bosquejo con los datos del problema:



Sea V = (0, 25) el vértice de la parábola la ecuación de la parábola es:

$$(x - 0)^2 = 4a(y - 25) \qquad (1)$$

Puesto que el punto P(10, 21) se encuentra en la parábola se cumple que:

$$10^2 = 4a(21 - 25) \quad ó \quad a = -\frac{25}{4}$$

sustituyendo en (1) se tiene:

$$x^2 = 4(-\frac{25}{4})(y - 25)$$

$$x^2 = -25(y - 25) \qquad (2)$$

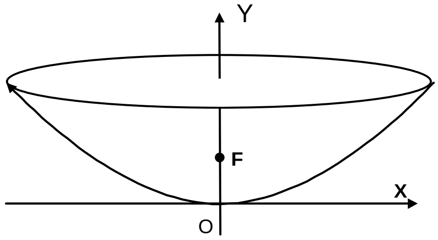
para calcular la distancia "d" basta sustituir las coordenadas del punto (d, 0) en la ecuación (2)

$$d^2 = -25\,(0 - 25) \;\Rightarrow\; d = \pm 25.$$

Lo que nos indica que el agua tocará el suelo a 25m de la recta vertical.

Ejemplo 7:
Un espejo parabólico tiene una profundidad de 12cm en el centro y un diámetro en la parte superior de 32cm. Hallar la distancia del vértice al foco.

Solución



Los ejes coordenados se eligen de modo que la parábola tenga su vértice en el origen y su eje a lo largo del eje Y; además, se abre hacia arriba. Por lo tanto, la ecuación de la parábola es de la forma:

$$x^2 = 4py$$

donde "p" centímetros es la distancia del vértice al foco. Como el punto (16, 12) está en la parábola, sus coordenadas han de satisfacer la ecuación y se tiene así:

$$16^2 = 4p(12)$$

$$p = 16/3$$

por lo tanto la distancia del vértice al foco es 16/3 cm.

Ejemplo 8:
Hallar la longitud del radio vector (radio focal) del punto de la parábola: $x^2 + 4x + 2y - 3 = 0$, cuya abscisa es 1.

Solución
La forma ordinaria de la ecuación de la parábola dada es:

$$\mathcal{P}:\ (x+2)^2 = -2(y - \frac{7}{2}) \text{ , de donde:}$$

$h = -2$; $k = 7/2$; $p = -1/2$

Si: $P_1(1, y_1) \in \mathcal{P} \Rightarrow 1 + 4 + 2y_1 - 3 = 0$

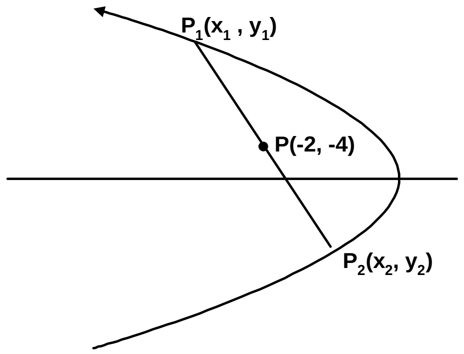
luego: $y_1 = -1$.

Reemplazando valores en la ecuación del radio focal tenemos:

$$|P_1F| = |y_1 - k + p| = \left|-1 - \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\right| = 5$$

Ejemplo 9:
Si P(–2, –4) es el punto medio de una cuerda de la parábola: $y^2 + 6x + 10y + 19 = 0$, hallar la ecuación de dicha cuerda.

Solución



Sean $P_1(x_1\ ,\ x_2)$ y $P_2(x_2\ ,\ y_2)$ los extremos de la cuerda. Si P(–2, –4) biseca al segmento entonces:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -2 \Rightarrow x_1 + x_2 = -4$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = -4 \Rightarrow y_1 + y_2 = -8$$

$P_1(x_1, y_1) \in \mathbb{P}$:

$$\Rightarrow y_1^2 + 6x_1 + 10y_1 + 19 = 0$$

$P_2(x_2\ ,\ y_2) \in \mathbb{P}$:

$$\Rightarrow y_2^2 + 6x_2 + 10y_2 + 19 = 0$$

Restando ambas ecuaciones miembro a miembro se tiene:

$$(y_1^2 - y_2^2) + 6(x_1 - x_2) + 10(y_1 - y_2) = 0$$

de donde: $(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + 6(x_1 - x_2) + 10(y_1 - y_2) = 0$

Como $y_1 + y_2 = -8$. Entonces:

$$-8(y_1 - y_2) + 6(x_1 - x_2) + 10(y_1 - y_2) = 0$$

$$6(x_1 - x_2) = -10(y_1 - y_2).$$

Luego: $\dfrac{6}{-2} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = m \Rightarrow m = -3$

Por tanto la ecuación de la cuerda es: L: y + 4 = –3(x + 2) ⇔ L: 3x + y + 10 = 0

Ejemplo 10
Cuál es el valor de m ≠ 0, para que las coordenadas del foco de la parábola de ecuación: $x^2 + 4x - 4my - 8 = 0$ sumen cero.

Solución

Reduciendo la ecuación de la parábola a su forma ordinaria resulta:

$$(x+2)^2 = 4m(y+\frac{3}{m})$$

de donde: h = –2 ; k = –3/m ; p = m

Dado que:

F(h, k + a); según el problema: h + k + a = 0 $\Rightarrow$ $-2-\frac{3}{m}+m=0$

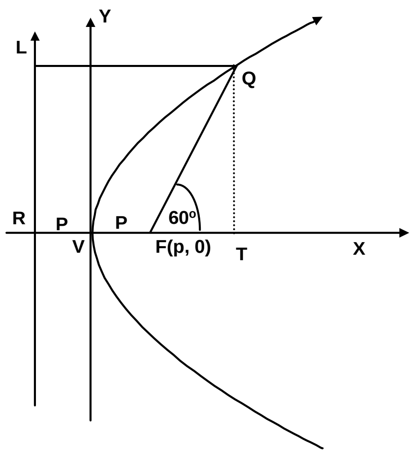
de donde: $m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$ ó $m = -1$.

Ejemplo 11

Una pelota describe una curva parabólica alrededor de un punto F, siendo éste el foco de la parábola. Cuando la pelota está a 10m de F, el segmento de recta de F a la pelota hace un ángulo de 60° con el eje de la parábola.

a) Hallar la ecuación e la parábola.
b) ¿Qué tan cerca de F pasa la pelota?

Solución



Consideremos:

V = (0, 0) el vértice de la parábola.

F = (p, 0) el foco y

L: x = –p, la directriz

Calcularemos p.

Por definición de la parábola se tiene para el punto Q.

La distancia de Q a F = dist, de Q a L

10 = dist. de Q a L

Por otra parte de la figura se tiene:

dist Q a L = $|V - R| + |F - V| +$

$+ |T - F| = p + p + 10 \cos 60°$

Luego:

$$10 = 2p + 10(1/2) \quad \Rightarrow \quad p = 5 / 2$$

Por tanto la ecuación buscada es: $y^2 = 10(x - \frac{5}{2})$

Finalmente la menor distancia de Q a F = menor distancia de Q a L. = $p = \frac{5}{2}m$.

Ejemplo 12

Un fabricante puede tener una utilidad de 20 soles en cada artículo que fabrica, si se desean semanalmente no más de 80 artículos. La utilidad decrece en 20 centavos por cada artículo que sobrepasa de los 80. ¿Cuántos artículos deben fabricarse a la semana para obtener la utilidad máxima?.

Solución

Establecemos la siguiente relación:

N° de art.	Utilidad
80	20
80 + 1	20 – 0.20
80 + 2	20 – (020)
. . . . . .	. . . .
80 + n	20 – 0.20 (n)

Luego:

$U = (80 + n)(20 - 0.2n)$

$U = -0.2n^2 + 4n + 1600$

$U = -\frac{1}{5}(n^2 - 20n) + 1600$

$U = -\frac{1}{5}(n^2 - 20n + 100) + 1600 + \frac{100}{5}$

$U = -\frac{1}{5}(n - 10)^2 + 1620$

de donde: $(n - 10)^2 = -5(U - 1620)$

Luego: $n - 10 = \sqrt{-5(U - 1620)}$

Como la cantidad subradical debe ser cero entonces se tiene que:

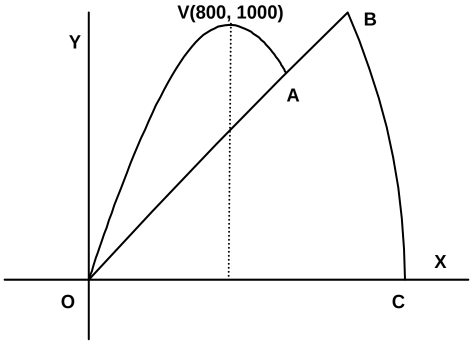
$$n - 10 = 0 \Rightarrow n = 10$$

Por tanto, a la semana deberán fabricarse 10 artículos más, entonces se fabricarán 10 + 80 = 90 artículos.

Ejemplo 13.

La gráfica muestra la trayectoria de un proyectil, el cual describe una parábola de eje vertical, el proyectil alcanza su máxima altura V(800, 1000) e impacta en la ladera de la colina OBC en el punto A. Hallar la ecuación de la trayectoria y las coordenadas del punto de impacto, si B(1600, 1400) .

Solución



La ecuación de la trayectoria es de la forma:

$$(x - 800)^2 = 4p(y - 1000)$$

Como el origen (0, 0) pertenece a la trayectoria, entonces:
$(-800)^2 = 4p(-1000) \Rightarrow p = -160$

Luego la ecuación de la trayectoria es:
$(x - 800)^2 = -640(y - 1000)$ ó

$$x^2 - 1600x + 640y = 0 \qquad (1)$$

Por otro lado, la ecuación del lado OB es: $y = \frac{7}{8}x$ (2)
De donde se obtiene: $x = 1040 \wedge y = 910$.

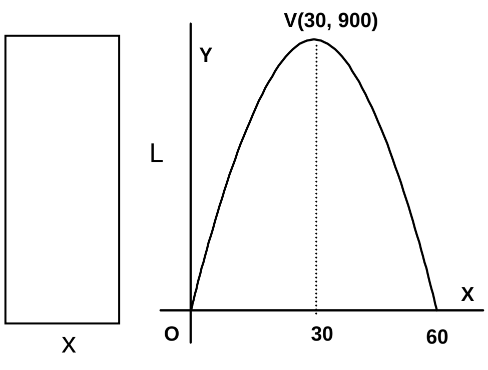
Por tanto el punto de impacto es:

A(1040, 910)

Ejemplo 14.

Es necesario encerrar un campo rectangular con una cerca de 120m de longitud. Determinar la relación existente entre el área “Y” del campo, cuando uno de sus lados es “x”. ¿Para qué valor de x el área es máxima?.

Solución



Si “y” es el área del rectángulo entonces:
$y = L.x$. (L = largo; x = ancho)

De donde: $2x + 2L = 120 \Rightarrow L = 60 - x$
Luego, el área "y" del campo rectangular cercado es:

$y = (60 - x)x$ ó $(x - 30)^2 = -(y - 900)$

de donde se tiene que el valor de "x" que maximiza el área (la ordenada) es $x = 30$; por tanto el área máxima es $900m^2$

TANGENTES A UNA PARABOLA

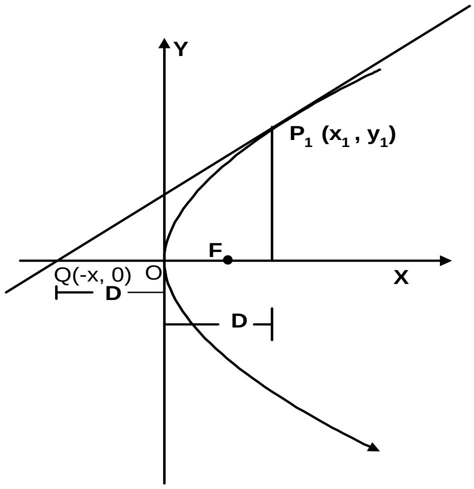
De la ecuación general de la recta tan-gente de una ecuación de 2do grado, la ecuación de su tangente se halla empleando el método del discriminante; se presentan los siguientes casos:

Caso 1: Tangentes en un punto de contacto dado.

Si (x_1 , y_1) es un punto de la parábola dada por: $y^2 = 4px$, la tangente tiene por ecuación:

$$\boxed{y_1 \cdot y = 2p(x + x_1)}$$

Si se hace y = 0, tal como se ve en la figura, se tiene el siguiente teorema:



Teorema:
La recta tangente a la parábola P en punto $P_1(x_1, y_1)$ de P, corta al eje focal en un punto Q tal que la distancia de Q al vértice es igual a la distancia del vértice al pie de la perpendicular trazada desde el punto de contacto $P_1(x_1 , y_1)$ al eje focal.

Observación:

1. La ecuación de la tangente que pasa por un punto dado y eje horizontal se halla también mediante:

$$\boxed{y_1 \cdot x - 2x_1 \cdot y + x_1 \cdot y_1 = 0}$$

2. La ecuación de la tangente que pasa por un punto dado y eje vertical se halla también mediante:

$$\boxed{2y_1 \cdot x - x_1 \cdot y + x_1 \cdot y_1 = 0}$$

Caso 2: Tangente paralela a una dirección dada.
Teorema:
La tangente de pendiente m a la parábola P: $y^2 = 4px$, tiene la forma:

$$\boxed{y = mx + \frac{p}{m} \quad ; \quad m \neq 0}$$

Prueba:
Sea la ecuación de la tangente:

$$y = mx + b \qquad (1)$$

sustituyendo en la ecuación de la parábola se tiene:

$(mx + b)^2 = 4px \iff m^2x^2 + (2bm - 4pm)^2 + b^2 = 0$

Por la condición de tangencia: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ (discriminante de ecuación de 2do grado)

$(2bm - 4pm)^2 - 4m^2b^2 = 0$

$(2bm - 4pm)^2 = 4m^2b^2$

$4m^2b^2 - 16bpm^2 + 16p^2m^2 = 4m^2b^2$

$\Rightarrow b = \frac{p}{m}$

Luego reemplazando en (1) se tiene:

$$y = mx + \frac{p}{m} \quad ; \quad m \neq 0$$

Caso 3: Tangentes trazadas desde un punto exterior.

En este caso usaremos la condición de tangencia para una curva de ecuación cuadrática:

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$ (discriminante)

para hallar el valor de la pendiente y con ella escribir la ecuación de la recta tangente usando la "Ecuación punto - pendiente" veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1:
Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto P(–3, 3) a la parábola: $y^2 - 3x - 8y + 10 = 0$.
Solución

Consideremos la ec. $y - y_o = m(x + x_o)$

Sustituyendo en ella el punto P(–3, 3) se tiene:

$y - 3 = m(x + 3)$ que representa a la familia de rectas que pasan por P. de donde:

$$x = \frac{1}{m}(y - 3 - 3m) \qquad (1)$$

sustituyendo en la ecuación dada se tiene:

$$y^2 - \frac{3}{m}(y - 3 - 3m) - 8y + 10 = 0$$

$my^2 – 3(y – 3 – 3m) – 8my + 10m = 0$

$my^2 – (3 + 8m)y + (9 + 19m) = 0$

Aplicando la condición de tangencia a la ecuación de 2do grado en la variable y, se tiene:

$$(3 + 8m)^2 – 4m(9 + 19m) = 0$$

Desarrollando y reduciendo, la ecuación: $4m^2 – 4m – 3 = 0$

Se tiene las raíces, que son: $m_1 = 3/2$; $m_2 = –1/2$

Reemplazando estos valores en (1) resultan las ecuaciones de las tangentes:

L_1: $3x – 2y + 15 = 0$
L_2: $x + 2y – 3 = 0$

Ejemplo 2:

Hallar la ecuación de la tangente y la normal a la parábola $y^2 – 4x = 0$, en el punto P(1, 2).
Solución

Como la parábola es de eje horizontal usamos:

$$y_1 \cdot x - 2x_1 \cdot y + x_1 \cdot y_1 = 0$$

donde $P(x_1 , y_1) = (1, 2)$

Entonces:

$$2(x) – 2(1)y + (1)(2) = 0$$

$$2x – 2y + 2 = 0$$

Simplificando se obtiene la ecuación de la tangente: $x – y + 1 = 0$

La ecuación de la normal (es la perpendicular a la tangente en el punto de tangencia) hallamos tomando la inversa de la tangente con signo cambiado:

$m_t = 1$; $m_N = -1$

Por lo tanto: $y – 2 = (–1)(x – 1)$.
Ecuación de la Normal: $x + y + 3 = 0$

Ejemplo 3:
Dada la parábola $x^2 = 8y$; ¿cuál es la suma de las pendientes de las rectas tangentes en los extremos de su lado recto?.
Solución

La parábola es simétrica con respecto al eje Y, entonces sus rectas tangentes en los extremos de su lado recto son también simétricos con respecto al eje Y. En consecuencia la suma de sus pendientes será:

$$S = m + (–m) = 0$$

Ejemplo 4:

Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $x^2 + 4x + 12y – 8 = 0$ que es paralela a la recta: $3x + 9y – 8 = 0$.
Solución

Usaremos el método del discriminante. La ecuación de la tangente tiene la forma L: $x + 3y + k = 0$; de donde:

$y = -\frac{1}{3}(x + k)$; sustituyendo este valor en la ecuación de parábola se tiene:

$x^2 + 4x + 12(-\frac{1}{3}(x + k)) - 8 = 0$

$x^2 + 4x - 4(x + k) - 8 = 0$

$x^2 - 4(k + 2) = 0$

Usando: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

$0^2 - 4(1)(-4(k + 2)) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -2$

Por tanto la ecuación de la tangente es: L: $x + 3y - 2 = 0$

Ejemplo 5:

Se da a parábola $y^2 = 8x$ y el punto A(6, 0). Hallar las coordenadas de los puntos de la parábola cuya distancia al punto A sea mínima.

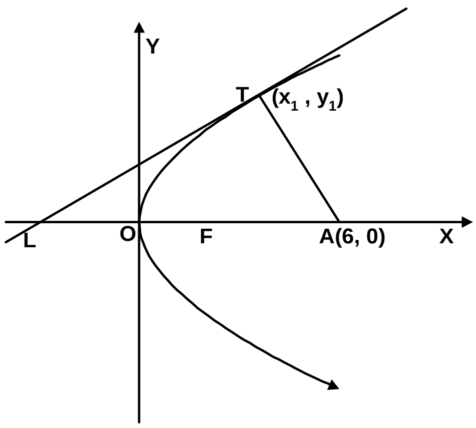
Solución

Es evidente que la distancia del punto de tangencia T al punto A es la mínima.

Consideramos $T(x_1, y_1)$ el punto de tangencia. SI $y^2 = 8x \Rightarrow p = 2$. Luego la ecuación de la tangente es: $y_1 \cdot y = 2p(x + x_1)$

Así, L: $y_1 \cdot y = 2(2)(x + x_1)$

$4x - y_1 \cdot y + 4x_1 = 0 \Rightarrow m = \frac{4}{y_1}$



Como:

$L \perp AT \Rightarrow m \cdot m_{AT} = -1$

$\Rightarrow (\frac{4}{y_1})(\frac{y_1}{x_1 - 6}) = -1$

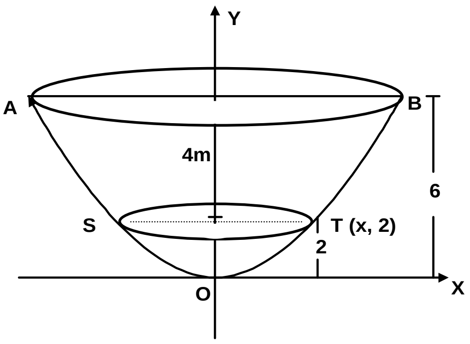
De donde: $x_1 = -1$, valor que sustituyen-do en la ecuación de la parábola se tiene:

$y^2 = 16 \Leftrightarrow y_1 = \pm 4$.

Por tanto los puntos buscados son: T(2, 4) ó T(2, –4)

Ejemplo 6:
Un depósito de agua tiene sección transversal parabólica, cuando el nivel AB del agua alcanza un altura de 6 m, su longitud AB mide 24m; cuando el nivel del agua desciende 4 m, se pide calcular la longitud RT del nivel del agua.

Solución
Consideremos la gráfica siguiente:



La ecuación de la sección transversal es: $x^2 = 4py$.

Los extremos del nivel AB son:

A(–12, 6) y B(12, 6)

Si $B(12, 6) \in \mathcal{P} \Rightarrow (12)^2 = 4p(6)$

de donde: $p = 6 \Rightarrow x^2 = 24y$

Ahora para T:

$T(x, 2) \in \mathcal{P} \Rightarrow x^2 = 48 \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$

Por lo tanto: $ST = 2x = 8\sqrt{3}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

"Los sabios son los que buscan la verdad; los necios piensan ya haberla encontrado".

Marianao

16. Hallar la ecuación de la parábola de foco el punto (6, –2) y directriz la recta $x - 2 = 0$.
a) $y^2 + 4y - 8x + 36 = 0$
b) $y^2 - 4y + 8x - 36 = 0$
c) $y^2 + 8y - 4x + 36 = 0$
d) $y^2 + 6y - 4x + 16 = 0$
e) Ninguna Anterior

17. Hallar la ecuación de la parábola de vértice el punto (2, 3), de eje paralelo al eje ordenadas, y que pase por el punto (4, 5).
a) $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$
b) $x^2 + 4x - 2y - 10 = 0$
c) $x^2 + 8x + 2y + 10 = 0$
d) $x^2 - 8x - 4y + 16 = 0$
e) Ninguna Anterior.

18. Hallar la ecuación de la parábola de eje paralelo al eje de abscisas, y que pase por los puntos (–2, 1); (1, 2) y (–1, 3).

a) $5y^2 - 2y + 21x + 20 = 0$
b) $5y^2 + 2x - 21y + 20 = 0$
c) $5y^2 - 6y + 11x + 10 = 0$
d) $4y^2 - 7y + 12x + 10 = 0$
e) Ninguna Anterior.

19. Hallar la ecuación general de la parábola cuyo eje sea paralelo al eje de abscisas y que pase por los puntos (3, 3); (6, 5) y (6, –3). Dar como respuesta el coeficiente de x.

a) 1 b) 2 c) –2 d) –4 e) N.A

20. Hallar la ecuación general de una parábola de eje vertical y que pase por los puntos (4, 5); (–2, 11) y (–4, 21). Dar como respuesta el vértice de la parábola.

a) (2, 3) b) (3, 2) c) (1, 3) d) (2, 4) e) N.A.

21. Hallar la ecuación general de la parábola de eje horizontal que pase por los puntos A(1, 2); B(5, 3) y C(11,4). Dar la suma de coeficientes

a) 2 b) –2 c) 8 d) –6 e) N.A.

22. Una parábola cuyo eje es paralelo al eje de ordenadas pasa por los puntos (1, 1); (2, 2) y (–1, 5). Hallar la longitud del lado recto.

a) 4 b) 2 c) –1 d) 1 e) N.A.

23. Para que valores del coeficiente angular k, la recta: $y = kx + 2$, corta a la parábola: $y^2 = 4x$.

a) $k < 1/2$ b) $k > 1/2$ c) $k = 0$ d) $k = 1/2$ e) N.A

24. Para que valores del coeficiente angular k, la recta: $y = kx + 2$, es tangente a la parábola: $y^2 = 4x$.

a) $k > 1/2$ b) $k < 1/2$ c) $k = 1/2$ d) $k \neq 1/2$ e) N.A.

25. Para que valores del coeficiente angular k, la recta: $y = kx + 2$ pasa por fuera de la parábola: $y^2 = 4x$.

a) $k > 1/2$ b) $k < 1/2$ c) $k = 1/2$ d) $k \neq 1/2$ e) N.A.

26. Hallar los puntos de intersección de la parábola: $x^2 = 4y$ con la recta: $x + y - 3 = 0$. Dar como respuesta la suma de las componentes de los puntos de intersección.

a) –6 b) 9 c) 2 d) 6 e) N.A

27. Hallar los puntos de intersección de la parábola: $y^2 = -9x$ con la recta: $3x + 4y - 12 = 0$. Dar como respuesta la suma de las componentes de los puntos de intersección.

a) –6 b) 9 c) 2 d) 6 e) N.A

28. Hallar los puntos de intersección de la recta: $3x - 2y + 6 = 0$, con la parábola $y^2 = 6x$. Dar como respuesta la suma de las abscisas.

a) 0 b) 1 c) 12 d) –18 e) N.A

29. Encuéntrese la ecuación del conjunto de todos los puntos en el plano coordenado que equidistan del punto (0, p) y la recta L: $y = -p$.

a) $x^2 = 4py$ b) $x^2 = -4y$ c) $y^2 = 4px$ d) $y^2 = 4x$ e) N.A.

30. Hallar la longitud del radio vector del punto de la parábola: $x^2 + 9y = 0$; cuya abscisa es igual a $-3/2$.
a) 5/2 b) 3/2 c) 3/7 d) 1 e) N.A.

31. La ecuación de la parábola con vértice en el origen de coordenadas, simétrica con respecto al eje Y, y que pasa por el punto (4, –8) es:
a) $2x^2 + y = 24$ b) $x^2 + 2y = 0$ c) $x^2 + 2y = -12$ d) $x^2 - 2y = 0$
e) $2y^2 - y = 40$

32. La longitud del segmento que une el foco de la parábola $y^2 = -9x$ con el punto de intersección de ésta con la recta L: $3x + 4y - 12 = 0$; es:
a) 25/3 b) 25/4 c) 26/4 d) 26/3 e) N.A

33. La longitud de la cuerda que une los puntos de intersección de la parábola: $y^2 = 8x$, con la recta L_1: $2x + y - 8 = 0$ es:
a) $3\sqrt{5}$ b) $4\sqrt{5}$ c) $5\sqrt{5}$ d) $6\sqrt{5}$ e) $7\sqrt{5}$

34. Se tiene la parábola: $Y = ax^2 + bx + c$, que pasa por el origen de coordenadas; sabiendo que su vértice es el punto V = (2, 3); hallar a + b + c
a) – 3/4 b) 1 c) 9/4 d) – 4 e) –5/4

35. Hallar las ecuaciones de la parábola si los extremos de su lado recto son los puntos Q(1, 3) y R(7, 3).
a) $(x - 4)^2 = 6(y - 3/2)$; $(x + 4)^2 = -6(y + 3/2)$
b) $(x - 4)^2 = 6(y - 3/2)$; $(x - 4)^2 = -6(y - 9/2)$
c) $(x + 4)^2 = 6(y + 3/2)$; $(x + 4)^2 = -6(y + 9/2)$
d) $(x - 4)^2 = 3(y - 3/2)$; $(x - 4)^2 = -3(y - 9/2)$
e) e) N.A.

36. Hallar la ecuación de una parábola de directriz horizontal, foco F(2, 1) y vértice sobre la recta $3x + 7y + 1 = 0$.
a) $(x - 2)^2 = 8(y - 1)$
b) $(x + 4)^2 = 8(y + 1)$
c) $(x - 4)^2 = 8(y - 2)$
d) $(x - 2)^2 = 8(y + 1)$
e) N.A.

37. Si la directriz de una parábola es L: $3x - 4y + 5 = 0$ y su foco es F(6, 2); hallar la distancia del vértice a la directriz.
a) 1/2 b) 1 c) 3/2 d) 5/2 e) N.A.

38. Hallar la ecuación de la parábola cuya directriz es: x = 2, y el vértice y foco están respectivamente, sobre las rectas, L_1: $3x - 2y - 19 = 0$ y L_2: $x + 4y = 0$.
a) $(y - 2)^2 = 12(x - 5)$
b) $(y + 2)^2 = 12(x + 3)$
c) $(y + 5)^2 = 12(x - 2)$
d) $(y + 2)^2 = 12(x - 5)$
e) N.A.

39. Hallar la ecuación de una cuerda de la parábola $(y + 5)^2 = -6(x - 1)$; si su punto medio es P(–2, –4).
a) $3x + y + 10 = 0$
b) $3x + y = 10$

c) $3x - y - 5 = 0$
d) $3x - y = -6$
e) $x - 3y - 10 = 0$

40. Hallar el valor de $k \neq 0$ de manera que el lado recto, de la parábola P: $x^2 + 4x - 2ky = 0$, mida 4 unidades.
a) 2 ó 1 b) –2 ó 4 c) 2 ó –2 d) 4 ó –2 e) N.A.

41. Hallar el valor de $k \neq 0$ de manera que las coordenadas del vértice de la parábola: $y^2 + kx + 2y - 3 = 0$, sumen 3 unidades.
a) 3 b) –2 c) 1 d) 5 e) N.A.

42. ¿Cuál es el valor de $k \neq 0$ para que las coordenadas del foco de la parábola: $x^2 + 4x - 4ky - 8 = 0$ sumen cero?.
a) 1 ó 3 b) –1 ó 3 c) 1 ó –3 d) 2 ó 3 e) N.A.

43. El vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo es el extremo L del lado recto de la parábola: $y^2 = 8x$. El segundo vértice del triángulo es el vértice de la parábola. ¿Cuál es el tercer vértice del triángulo, si se sabe que éste se encuentra sobre el eje X?.
a) (8, 0) b) (10, 0) c) (–10, 0) d) (–6, 0) e) N.A,

Encuentre en cada caso, la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto dado.

44. $2x^2 - x + 12y + 22 = 0$; Q(36, 1)
a) $x - 16y = 20$
b) $x + 16y = -10$
c) $x - 8y = -14$
d) $4x - 3y = 4$
e) $x - 6y - 15 = 0$

45. $x^2 - 3y = 0$; Q(2, 4/3)
a) $2x - 6y = 20$
b) $x + 5y = -10$
c) $x - 8y = -4$
d) $4x - 3y = 4$
e) $x - 4y - 7 = 0$

46. $3y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$; Q(10, 3)
a) $x - 26y = 20$
b) $x + 16y = -10$
c) $x - 8y = -14$
d) $3x - 5y = 14$
e) $x - 6y + 8 = 0$

47. $y^2 + x = 0$; Q(–4, 2)
a) $x - 16y = 7$
b) $x + 16y = -10$
c) $x - 8y = -4$
d) $4x - 2y = -5$
e) $x + 4y - 4 = 0$

48. $y^2 + 5x + 5 = 0$; Q(–6, 5)
a) $x - 5y = 2$

b) $x + 6y = -10$
c) $x + 2y = 4$
d) $4x - 3y = 4$
e) $x - 6y - 15 = 0$

49. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola P: $y^2 - 8x - 10y + 49 = 0$ en los puntos P(5, 9) y Q(21, –7).¿En qué punto se cortan estas rectas tangentes?.
a) (–3, 1) b) (–3, 2) c) (1, –3) d) (1, –2) e) N.A.

50. Hallar la ecuación de la recta tangente de pendiente –1 a la parábola: $y^2 - 8x = 0$.
a) $x + y + 2 = 0$
b) $x - y - 3 = 0$
c) $x - y - 2 = 0$
d) $2x + 3y + 12 = 0$
e) $2x + y + 12 = 0$

51. Hallar la ecuación de la tangente a la parábola: $x^2 + 4x + 12y - 8 = 0$, que es paralela a la recta L: $3x + 9y - 11 = 0$.
a) $x + 3y - 2 = 0$
b) $x - 3y + 12 = 0$
c) $x - 5y + 7 = 0$
d) $x + 5y - 7 = 0$
e) $3x + y - 9 = 0$

52. Hallar una de las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto P(1, 4) a la parábola: $y^2 + 3x - 6y + 9 = 0$.
a) $3x - 2y + 5 = 0$
b) $x + 2y + 9 = 0$
c) $3x + 2y - 5 = 0$
d) $x - 2y + 9 = 0$
e) $2x - 3y + 5 = 0$

53. El cable de un puente de un puente colgante tiene forma parabólica y está sujeto a dos torres de 15m de altura, situados a 120m una de otra. Sí el punto más bajo del cable está a 3m del piso del puente, hallar la longitud de una barra de soporte que está a 30m a la derecha del punto mas bajo del cable y en posición vertical.
a) 3m b) 6m c) 9m d) 12m e) N.A.

54. Un arco parabólico tiene una altura de 20m y en la base 36m de ancho. Si el vértice está en la parte superior del arco, ¿a qué altura, sobre la base, tiene un ancho de 18m?.
a) 18m b) 15m c) 12m d) 9m e) N.A.

55. La sección longitudinal de un reflector es parabólica de 16m de ancho y 8 m de profundidad. ¿A qué distancia del vértice está el foco?.
a) 6m b) 4.5m c) 4m d) 4m e) 2m